Maranda Linț
Dorin Linț
Rozalia Marinescu
Dan Ștefan Marinescu
Mihai Monea
Steluța Monea
Marian Stroe

Matematică de excelență

pentru concursuri, olimpiade și centre de excelență

clasa a VIII-a

mate 2000 – excelență

ÎNVĂȚARE DE EXCELENȚĂ®
supersucces

CUPRINS

Capitolul I
MULŢIMEA NUMERELOR REALE

A. ELEMENTE DE TEHNICĂ MATEMATICĂ

1. Fie x, y numere reale $y \neq \frac{1}{2}$. Știind că $x\cdot(x-2)=4y\cdot(y-1)$, arătați că numărul $z=\frac{x-1}{2y-1}$ este întreg.

Soluția I:

$x\cdot(x-2)=4y\cdot(y-1) \Leftrightarrow x^2-4y^2-2x+4y=0 \Leftrightarrow (x-2y)(x+2y)-2(x-2y)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-2y)(x+2y-2)=0 \Rightarrow x-2y=0$ sau $x+2y-2=0.$

I. Dacă $x-2y=0 \Rightarrow x=2y$. Atunci $\frac{x-1}{2y-1}=\frac{2y-1}{2y-1}=1\in\mathbb{Z}$, pentru $y\neq\frac{1}{2}$.

II. Dacă $x+2y-2=0 \Rightarrow x=-2y+2$. Atunci $\frac{x-1}{2y-1}=\frac{-2y+2-1}{2y-1}=-1\in\mathbb{Z}, \forall y\neq\frac{1}{2}$.

În concluzie, dacă sunt verificate condițiile din enunț, numărul z este întreg.

Soluția a II-a: $x\cdot(x-2)=4y(y-1) \Leftrightarrow x^2-2x=4y^2-4y \Leftrightarrow x^2-2x+1=4y^2-4y+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)^2=(2y-1)^2 \Leftrightarrow |x-1|=|2y-1| \Leftrightarrow \left|\frac{x-1}{2y-1}\right|=1, \forall y\neq\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x-1}{2y-1}\in\{-1;\,1\}\subset\mathbb{Z}.$

2. Diferența dintre media aritmetică și media geometrică a numerelor naturale a și b este 1. Arătați că $\frac{a}{2}$ și $\frac{b}{2}$ sunt pătratele a două numere naturale consecutive.

Soluție: Fie $a > b$. Atunci $\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=1 \Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab}=2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2=2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{a}-\sqrt{b}=\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{a}=\sqrt{2}+\sqrt{b} \Leftrightarrow a=b+2+2\sqrt{2b} \Leftrightarrow a-b-2=2\sqrt{2b}.$

Deoarece $a-b-2\in\mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{2b}\in\mathbb{N}$, deci $b=2k^2$, $k\in\mathbb{N}$. Obținem $\frac{b}{2}=\frac{2k^2}{2}=k^2$ și $\frac{a}{2}=\frac{2\sqrt{2b}+b+2}{2}=\frac{2\cdot 2k+2k^2+2}{2}=k^2+2k+1=(k+1)^2$.

3. Fie a,b,α,β numere raționale, $a>0$, $b>0$. Arătați că:

a) dacă $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\in\mathbb{Q}$, atunci $\sqrt{a}\in\mathbb{Q}$ și $\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$;

b) dacă $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\in\mathbb{Q}$, atunci $\sqrt{a}\in\mathbb{Q}$ și $\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$;

c) dacă $\left(\alpha\sqrt{a}+\beta\sqrt{b}\right)\in\mathbb{Q}$, atunci $\sqrt{a}\in\mathbb{Q}$ și $\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$.

Soluție: **a)** $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\in\mathbb{Q}$. Deoarece $(a-b)\in\mathbb{Q}$, rezultă $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\in\mathbb{Q}$.

Atunci $\sqrt{a}=\dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})+(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{2}\in\mathbb{Q}$ și $\sqrt{b}=\dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})-(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{2}\in\mathbb{Q}$.

b) Procedăm ca la punctul **a)**; $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\in\mathbb{Q}$. Deoarece $(a-b)\in\mathbb{Q}$, rezultă $(\sqrt{a}+\sqrt{b})\in\mathbb{Q}$. Din $(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})\in\mathbb{Q}$ obținem $\sqrt{a}\in\mathbb{Q}$ și $\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$.

c) Distingem următoarele situații:

$c_1)$ $\alpha<0$, $\beta<0$. Din $\alpha\sqrt{a}+\beta\sqrt{b}=r\in\mathbb{Q}$ obținem $-\alpha\sqrt{a}-\beta\sqrt{b}=-r\in\mathbb{Q}$ cu $-\alpha>0$, $-\beta>0$ sau $\sqrt{\alpha^2a}+\sqrt{\beta^2b}=-r\in\mathbb{Q}$. Aplicând **a)**, obținem $\sqrt{\alpha^2a}\in\mathbb{Q}$ și $\sqrt{\beta^2b}\in\mathbb{Q}$ sau $-\alpha\sqrt{a}\in\mathbb{Q}$ și $-\beta\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$, de unde $\sqrt{a}\in\mathbb{Q}$ și $\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$.

$c_2)$ Dacă $\alpha>0$, $\beta>0$, atunci $\alpha\sqrt{a}+\beta\sqrt{b}=\left(\sqrt{\alpha^2a}+\sqrt{\beta^2b}\right)\in\mathbb{Q}$. Din **a)** obținem $\sqrt{\alpha^2a}\in\mathbb{Q}$ și $\sqrt{\beta^2b}\in\mathbb{Q}$ sau $\alpha\sqrt{a}\in\mathbb{Q}$ și $\beta\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$. Rezultă $\sqrt{a}\in\mathbb{Q}$, $\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$.

$c_3)$ Dacă α,β au semne diferite, de exemplu $\alpha>0$, $\beta<0$, atunci $\alpha\sqrt{a}+\beta\sqrt{b}=\left(\sqrt{\alpha^2a}-\sqrt{\beta^2b}\right)\in\mathbb{Q}$ și, aplicând **b)**, deducem $\sqrt{\alpha^2a}\in\mathbb{Q}$ și $\sqrt{\beta^2b}\in\mathbb{Q}$ sau $\alpha\sqrt{a}\in\mathbb{Q}$ și $-\beta\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$. Rezultă $\sqrt{a}\in\mathbb{Q}$ și $\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$.

4. Fie $a,b,c,\alpha,\beta,\gamma$ numere raționale pozitive. Arătați că:

a) dacă $(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})\in\mathbb{Q}$, atunci $\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}\in\mathbb{Q}$;

b) dacă $(\alpha\sqrt{a}+\beta\sqrt{b}+\gamma\sqrt{c})\in\mathbb{Q}$, atunci $\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}\in\mathbb{Q}$.

Soluție: **a)** Fie $r=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$, $r\in\mathbb{Q}$. Atunci $r-\sqrt{c}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ și $r>\sqrt{c}$. Obținem $r^2-2r\sqrt{c}+c=a+b+2\sqrt{ab}$ sau $\sqrt{ab}+r\sqrt{c}=\dfrac{r^2+c-a-b}{2}$. Numărul $\dfrac{r^2+c-a-b}{2}$ este rațional, deci $(\sqrt{ab}+r\sqrt{c})\in\mathbb{Q}$. Aplicând rezultatul problemei precedente, rezultă $\sqrt{c}\in\mathbb{Q}$. Din enunț, $(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})\in\mathbb{Q}$, deci $(\sqrt{a}+\sqrt{b})\in\mathbb{Q}$. Obținem că $\sqrt{a}\in\mathbb{Q}$ și $\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$.

b) $\alpha,\beta,\gamma>0$. $\alpha\sqrt{a}+\beta\sqrt{b}+\gamma\sqrt{c}=\left(\sqrt{\alpha^2a}+\sqrt{\beta^2b}+\sqrt{\gamma^2c}\right)\in\mathbb{Q}$. Aplicând **a)**, obținem $\sqrt{\alpha^2a}\in\mathbb{Q}$, $\sqrt{\beta^2b}\in\mathbb{Q}$, $\sqrt{\gamma^2c}\in\mathbb{Q}$ sau $\alpha\sqrt{a}\in\mathbb{Q}$, $\beta\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$, $\gamma\sqrt{c}\in\mathbb{Q}$. Cum $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{Q}$, deducem $\sqrt{a}\in\mathbb{Q}$, $\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$, $\sqrt{c}\in\mathbb{Q}$.

5. Fie $a,b,c\in\mathbb{Q}_+$ și $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{Q}$ astfel încât numerele $\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c},\sqrt{\dfrac{a}{b}},\sqrt{\dfrac{b}{c}},\sqrt{\dfrac{c}{a}}$ sunt iraționale. Atunci $(\alpha\sqrt{a}+\beta\sqrt{b}+\gamma\sqrt{c})\in\mathbb{Q}$ dacă și numai dacă $\alpha=\beta=\gamma=0$.

Soluție: Evident, dacă $\alpha=\beta=\gamma=0$, atunci $\alpha\sqrt{a}+\beta\sqrt{b}+\gamma\sqrt{c}=0\in\mathbb{Q}$.

Fie acum $\alpha\sqrt{a}+\beta\sqrt{b}+\gamma\sqrt{c}=r\in\mathbb{Q}$. Obținem succesiv: $r-\gamma\sqrt{c}=\alpha\sqrt{a}+\beta\sqrt{b}\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\left(r-\gamma\sqrt{c}\right)^2=\left(\alpha\sqrt{a}+\beta\sqrt{b}\right)^2\Leftrightarrow r^2-2r\gamma\sqrt{c}+\gamma^2c=\alpha^2a+\beta^2b+2\alpha\beta\sqrt{ab}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow r\gamma\sqrt{c}+\alpha\beta\sqrt{ab}=\frac{r^2+\gamma^2c-\alpha^2a-\beta^2b}{2}\in\mathbb{Q}.$$

Dacă $\left(r\gamma\sqrt{c}+\alpha\beta\sqrt{ab}\right)\neq 0$, atunci am obține $\sqrt{c}\in\mathbb{Q}$, $\sqrt{ab}\in\mathbb{Q}$, în contradicție cu enunțul. Rezultă $r\gamma\sqrt{c}+\alpha\beta\sqrt{ab}=0$, deci $r\gamma\sqrt{c}=-\alpha\beta\sqrt{ab}$.
Din $\alpha\sqrt{a}+\beta\sqrt{b}+\gamma\sqrt{c}=r\Rightarrow r\alpha\sqrt{a}+r\beta\sqrt{b}+r\gamma\sqrt{c}=r^2\Rightarrow$
$\Rightarrow r\alpha\sqrt{a}+r\beta\sqrt{b}-\alpha\beta\sqrt{ab}=r^2\Leftrightarrow\left(r-\alpha\sqrt{a}\right)\left(r-\beta\sqrt{b}\right)=0.$

Deci $r=\alpha\sqrt{a}$ sau $r=\beta\sqrt{b}$, adică $\beta\sqrt{b}+\gamma\sqrt{c}=0$ sau $\alpha\sqrt{a}+\gamma\sqrt{c}=0.\ (*)$

Dacă $\beta\neq 0$, atunci $\sqrt{\frac{b}{c}}=-\frac{\gamma}{\beta}\in\mathbb{Q}$ sau $\sqrt{\frac{c}{a}}=-\frac{\alpha}{\beta}\in\mathbb{Q}$, în contradicție cu enunțul.

Rezultă $\beta=0$ și apoi din $(*)$ $\alpha=\beta=\gamma=0$.

6. Fie x,y,z numere strict pozitive cu proprietatea că $x\cdot y$, $y\cdot z$ și $z\cdot x$ sunt numere raționale.

a) Arătați că $\left(x^2+y^2+z^2\right)\in\mathbb{Q}$.

b) Arătați că, dacă $\left(x^3+y^3+z^3\right)\in\mathbb{Q}$, atunci $x,y,z\in\mathbb{Q}$.

Soluție: **a)** $x\cdot y\in\mathbb{Q}^*$, $y\cdot z\in\mathbb{Q}^*\Rightarrow\frac{x\cdot y}{y\cdot z}=\frac{x}{z}\in\mathbb{Q}$. Atunci $\left(x\cdot z\cdot\frac{x}{z}\right)=x^2\in\mathbb{Q}$.

$y\cdot z\in\mathbb{Q}^*$, $z\cdot x\in\mathbb{Q}^*\Rightarrow\frac{y\cdot z}{z\cdot x}=\frac{y}{x}\in\mathbb{Q}$. Atunci $\left(x\cdot y\cdot\frac{y}{x}\right)=y^2\in\mathbb{Q}$.

La fel, obținem $z^2\in\mathbb{Q}$, deci $\left(x^2+y^2+z^2\right)\in\mathbb{Q}$.

b) Deoarece $x,y,z>0$ și $x^2,y^2,z^2\in\mathbb{Q}$, rezultă că există $a,b,c\in\mathbb{Q}_+^*$ astfel încât $x=\sqrt{a}$, $y=\sqrt{b}$, $z=\sqrt{c}$. $\left(x^3+y^3+z^3\right)\in\mathbb{Q}\Rightarrow\left(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c}\right)\in\mathbb{Q}$, atunci obținem $\sqrt{a}\in\mathbb{Q}$, $\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$, $\sqrt{c}\in\mathbb{Q}$, deci $x,y,z\in\mathbb{Q}$.

7. Pentru x și y numere naturale, definim numerele

$$a=\frac{3^{2009}\cdot x+7^{2009}\cdot y}{10}\text{ și }b=\frac{3^{2009}\cdot y+7^{2009}\cdot x}{10}.$$

Arătați că a este număr natural dacă și numai dacă b este număr natural.

Mihai Opincariu

Soluție: Pentru orice $x,y\in\mathbb{N}^*$ și $n\in\mathbb{N}:\left(x^{2n+1}y^{2n+1}\right)\vdots(x+y.)$ Atunci $\left(3^{2009}+7^{2009}\right)\vdots(3+7)\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\left(3^{2009}+7^{2009}\right)\vdots 10$. $a+b=\frac{3^{2009}\cdot(x+y)+7^{2009}\cdot(y+x)}{10}=\frac{(x+y)\cdot\left(3^{2009}+7^{2009}\right)}{10}$.

Deoarece $\left(3^{2009}+7^{2009}\right)\vdots 10$ și $(x+y)\in\mathbb{N}$, obținem $(a+b)\in\mathbb{N}$. Dacă $a\in\mathbb{N}$, din

$(a+b)\in\mathbb{N}$ și $a\geq 0$ rezultă $b\in\mathbb{N}$. Reciproc, dacă $b\in\mathbb{N}$, din $(a+b)\in\mathbb{N}$ și $b\geq 0$ rezultă $a\in\mathbb{N}$. Cu aceasta problema este rezolvată.

8. Se consideră mulțimile $A=\left\{x\in\mathbb{Z}\mid\left[\sqrt{x-1}\right]=\dfrac{x-5}{2}\right\}, B=\left\{x\in\mathbb{Z}\mid\left[\sqrt{x+4}\right]=\dfrac{x-2}{3}\right\}$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului a. Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției „$\min A>\max B$".

Soluție: Condiția de existență a radicalului $\sqrt{x-1}$ impune $x\in\mathbb{N}^*$.

Notăm $m=\left[\sqrt{x-1}\right]$, $m\in\mathbb{N}\Rightarrow m=\dfrac{x-5}{2}$, de unde $x=2m+5$ (1).

Atunci $m=\left[\sqrt{2m+4}\right]$, deci $m\leq\sqrt{2m+4}<m+1$. Ultima dublă inegalitate devine: $m^2\leq 2m+4\leq m^2+2m+1$. Din $m^2\leq 2m+4$ și $2m+4\leq m^2+2m+1$ obținem $m(m-2)\leq 4$ și $m^2\geq 3$ cu soluțiile comune $m=2$, $m=3$.

Din (1) obținem $A=\{9, 11\}$. Condiția de existență a radicalului $\sqrt{x-4}$ impune $x\in\mathbb{N}^*$, $x\geq 4$. Notăm $n=\left[\sqrt{x-4}\right]$, $n\in\mathbb{N}\Rightarrow n=\dfrac{x-2}{3}$, de unde $x=3n+2$ (2).

Atunci $n=\left[\sqrt{3n-2}\right]$, deci $n\leq\sqrt{3n-2}<n+1\Rightarrow n^2\leq 3n-2<n^2+2n+1$, deci $n(n-3)\leq -2$ și $n^2-n+3>0$. Obținem $n=1$, $n=2$. Din (2) obținem $B=\{5, 8\}$.

$\min A=\min\{9, 11\}$, iar $\max B=\max\{5, 8\}=8$. Propoziția este adevărată.

9. Fie a și b numere reale strict pozitive, $a\neq b$, cu proprietatea că numerele $a-\sqrt{a\cdot b}$ și $b-\sqrt{a\cdot b}$ sunt raționale. Arătați că numerele a și b sunt raționale.

Soluție: $\left(a-\sqrt{a\cdot b}\right),\left(b-\sqrt{a\cdot b}\right)\in\mathbb{Q}^*\Rightarrow\dfrac{a-\sqrt{a\cdot b}}{b-\sqrt{a\cdot b}}=\dfrac{\sqrt{a}\cdot\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\sqrt{b}\cdot\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)}=-\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\in\mathbb{Q}$.

Fie $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=r\in\mathbb{Q}$, $r\neq 1$. Atunci $\sqrt{a}=r\cdot\sqrt{b}$ și $b-\sqrt{a\cdot b}=b-\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=b-r\cdot b=b\cdot(1-r)$.

Numărul $b-\sqrt{a\cdot b}$ este rațional, deci $b(1-r)$ este rațional. Deoarece $(1-r)\in\mathbb{Q}$ și $r\neq 1$, rezultă $b\in\mathbb{Q}$. Din $\sqrt{a}=r\cdot\sqrt{b}$ obținem $a=r^2\cdot b$ și, cum r^2, $b\in\mathbb{Q}$, rezultă $a\in\mathbb{Q}$. În concluzie, dacă $a,b\in\mathbb{R}_+$, $a\neq b$ și $a-\sqrt{a\cdot b}$, $b-\sqrt{a\cdot b}\in\mathbb{Q}$, atunci $a,b\in\mathbb{Q}$.

10. Fie $x\in\mathbb{R}$. Demonstrați că, dacă numerele $a=x^3-x$ și $b=x^2+1$ sunt raționale, atunci x este rațional.

Soluție: Dacă $x=0$, nu avem ce demonstra. Dacă $x\neq 0$, atunci avem: $\dfrac{a^2}{x^2}=\left(x^2-1\right)^2$ și $b^2=\left(x^2+1\right)^2$, adică $b^2-\dfrac{a^2}{x^2}=4x^2=4(b-1)$, de unde $(b-2)^2=\dfrac{a^2}{x^2}$. Dacă $b=2$, nu avem ce demonstra. Dacă $b\neq 2$, $x^2=\dfrac{a^2}{(b-2)^2}$, de unde $|x|=\left|\dfrac{a}{b-2}\right|\in\mathbb{Q}$ și atunci $x\in\mathbb{Q}$.

11. Pentru $n \in \mathbb{N}$, se consideră numărul:

$$a_n = \sqrt{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \cdot \left(\sqrt{\sqrt{n+1}+1} - \sqrt{\sqrt{n+1}-1}\right).$$

a) Aflați partea întreagă și partea fracționară a numărului a_n.

b) Calculați $\dfrac{a_n}{\sqrt{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \cdot \left(\sqrt{\sqrt{n+1}+1}+\sqrt{\sqrt{n+1}-1}\right)}$.

Soluție: **a)** $\sqrt{\sqrt{n+a}+1} > \sqrt{\sqrt{n+1}-1}$, deci $a_n > 0$.

$a_n^2 = \left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right) \cdot \left[\sqrt{n+1}+1-2\sqrt{\sqrt{n+1}+1} \cdot \sqrt{\sqrt{n+1}-1}+\sqrt{n+1}-1\right] =$

$= \left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right) \cdot \left(2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n+1-1}\right) = 2 \cdot \left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) =$

$= 2 \cdot (n+1-n) = 2.$ Cum $a_n > 0 \Rightarrow a_n = \sqrt{2} = 1 + \left(\sqrt{2}-1\right)$, $[a_n] = 1$ și $\{a_n\} = \sqrt{2}-1$.

b) Fie $b_n = \sqrt{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \cdot \left(\sqrt{\sqrt{n+1}+1}+\sqrt{\sqrt{n+1}-1}\right)$, iar $b_n > 0$.

$b_n^2 = \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) \cdot \left(\sqrt{n+1}+1+2\sqrt{\sqrt{n+1}+1} \cdot \sqrt{\sqrt{n+1}-1}+\sqrt{n+1}-1\right) =$

$= \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) \cdot \left(2\sqrt{n+1}+2\sqrt{n}\right) = 2.$ Obținem $\dfrac{a_n}{b_n} = 1.$

12. Aflați numărul perechilor de fracții zecimale $\left(a,b;c,d\right)$, care verifică egalitatea

$$\frac{\sqrt{\sqrt{\overline{a,b}}}+\sqrt{\sqrt{\overline{c,d}}}}{\sqrt{\sqrt{\overline{a,b}}}-\sqrt{\sqrt{\overline{c,d}}}} = 3.$$

Soluție: Egalitatea se transformă succesiv: $3\sqrt{\sqrt{\overline{a,b}}} - 3\sqrt{\sqrt{\overline{c,d}}} = \sqrt{\sqrt{\overline{a,b}}} + \sqrt{\sqrt{\overline{c,d}}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{\sqrt{\overline{a,b}}} = 2\sqrt{\sqrt{\overline{c,d}}} \Leftrightarrow \overline{a,b} = 16 \cdot \overline{c,d}$. Facem observația că $a,b,c,d \in \{0,1,2,...,9\}$ și $0,1 \le \overline{a,b} \le 9,9 \Rightarrow 0,1 \le 16 \cdot \overline{c,d} \le 9,9 \,|:16$, $0,1 \le \overline{c,d} \le 0,6 \Rightarrow \overline{c,d} \in \{0,1;0,2;...;0,6\}$.

Sunt șase perechi de fracții $\left(a,b;\ c,d\right)$ care verifică egalitatea din enunț:

(1,6; 0,1), (3,2; 0,2), (4,8; 0,3); (6,4; 0,4), (8,0; 0,5), (9,6; 0,6).

13. Se consideră numerele reale x și y, care verifică egalitatea $3^{[x]+[y]+1} - 7 \cdot 3^{[x]} = 222$. Arătați că $3 \cdot x < 2 \cdot y$.

Soluție: Egalitatea se mai scrie: $3^{[x]} \cdot \left(3^{[y]+1}-7\right) = 3 \cdot 74$. Deoarece $\left(3^{[y]+1}-7\right) \not\vdots\, 3$, iar $3^{[x]} \vdots\, 3$, rezultă $3^{[x]} = 3$ și $3^{[y]+1} - 7 = 74 \Leftrightarrow [x] = 1$ și $3^{[y]+1} = 81 \Leftrightarrow [x] = 1$ și $[y]+1 = 4 \Leftrightarrow x \in [1,2)$ și $y \in [3,4)$. Atunci $3 \cdot x \in [3,6)$ și $2 \cdot y \in [6,8)$.

Evident, $3 \cdot x < 2 \cdot y$.

14. a) Aflați numărul rațional a, pentru care $a\cdot(a+2)\cdot\sqrt{2}+\sqrt{2}$ este numărul rațional.

b) Aflați numărul rațional b pentru care $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot b^3-\frac{18\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot b^2+\frac{24\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot b-\sqrt{384}$ este număr rațional.

Soluție: **a)** $a\cdot(a+2)\cdot\sqrt{2}+\sqrt{2}=\sqrt{2}\cdot\left[a(a+2)+1\right]=\sqrt{2}\cdot(a+1)^2$. Numărul $\sqrt{2}$ este irațional, iar $a+1$ și $(a+1)^2$ sunt numere raționale. Cerința problemei este îndeplinită pentru $(a+1)^2=0$, deci $a=-1$.

b) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot b^3-\frac{18\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot b^2+\frac{24\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot b-\sqrt{384}=\sqrt{6}\cdot b^3-6\sqrt{6}b^2+12\sqrt{6}b-8\sqrt{6}=$
$=\sqrt{6}\cdot\left(b^3-6b^2+12b-8\right)=\sqrt{6}\cdot(b-2)^3$.

Numărul $\sqrt{6}$ este irațional, iar $b-2$ și $(b-2)^3$ sunt numere raționale. Cerința problemei este îndeplinită pentru $(b-2)^3=0$, deci $b=2$.

15. Pentru numărul natural nenul n, definim $E(n)=\frac{2n+\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$.

a) Arătați că $E(n)\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

b) Calculați partea întreagă pentru $S=E(1)+E(2)+...+E(24)$.

Soluție:

a) $E(n)=\frac{n+1+\sqrt{(n+1)(n-1)}+n-1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=\frac{\left(\sqrt{n+1}\right)^2+\sqrt{(n+1)(n-1)}+\left(\sqrt{n-1}\right)^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=$

$=\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)\cdot\left[\left(\sqrt{n+1}\right)^2+\sqrt{(n+1)(n-1)}+\left(\sqrt{n-1}\right)^2\right]}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)\cdot\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)}=\frac{\left(\sqrt{n+1}\right)^3-\left(\sqrt{n-1}\right)^3}{2}$.

Diferența dintre două pătrate perfecte consecutive nenule este un număr natural impar. Într-adevăr, $(k+1)^2-k^2=2k+1\geq 3,\ \forall k\in\mathbb{N}^*$, și este impar. Atunci numerele $n+1$ și $n-1$ sunt naturale, dar nu sunt simultan pătrate perfecte, pentru că diferența lor este 2. În aceste condiții, $\left(\sqrt{n+1}\right)^3$ și $\left(\sqrt{n-1}\right)^3$ nu pot fi simultan raționale. Rezultă că $E(n)$ este un număr irațional.

b) $S=\frac{\left(\sqrt{2}\right)^3-\left(\sqrt{0}\right)^3}{2}+\frac{\left(\sqrt{3}\right)^3-\left(\sqrt{1}\right)^3}{2}+\frac{\left(\sqrt{4}\right)^3-\left(\sqrt{2}\right)^3}{2}+...+\frac{\left(\sqrt{24}\right)^3-\left(\sqrt{22}\right)^3}{2}+\frac{\left(\sqrt{25}\right)^3-\left(\sqrt{23}\right)^3}{2}=$

$=\frac{\left(\sqrt{25}\right)^3+\left(\sqrt{24}\right)^3-\left(\sqrt{1}\right)^3}{2}=\frac{124+48\sqrt{6}}{2}=62+24\sqrt{6}$.

$24\sqrt{6}=\sqrt{576\cdot 6}=\sqrt{3456}$ și $58=\sqrt{3364}<\sqrt{3456}<\sqrt{3481}=59.$

Rezultă $62+58<62+24\sqrt{6}<62+59 \Leftrightarrow 120<62+24\sqrt{6}<121$ și $[S]=120.$

16. Fie $A=\left\{a\in\mathbb{R} \mid a=a_1\sqrt{3}+a_2\left(\sqrt{3}\right)^2+...+a_{2007}\left(\sqrt{3}\right)^{2007}; a_i\in\{-1,1\}; i=\overline{1,2007}\right\}.$

a) Determinați numărul de elemente raționale din mulțimea A.

b) Determinați numărul elementelor mulțimii A. Justificați răspunsul dat.

Soluție:

a) $a=\left(3\cdot a_2+...+3^{1003}\cdot a_{2006}\right)+\left(a_1+3\cdot a_3+...+3^{1003}\cdot a_{2007}\right)\cdot\sqrt{3},\ a_i\in\{-1,1\},\ i=\overline{1,2007}.$

Presupunem, prin reducere la absurd, că a este număr rațional. Atunci: $\left(a_1+3a_3+...+3^{1003}\cdot a_{2007}\right)\cdot\sqrt{3}$ este număr rațional, deci $a_1+3\cdot a_3+...+3^{1003}\cdot a_{2007}=0.$ Obținem $a_1=-3\cdot a_3-...-3^{1003}\cdot a_{2007}$, adică a_1 este multiplu al lui 3, fals. Rezultă că $a\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$, deci mulțimea A nu conține numere raționale.

b) $\text{card}A\le 2^{2007}$. Presupunem, prin reducere la absurd, că există două elemente egale în mulțimea A; $a=b\Rightarrow\left(a_1+3\cdot a_3+...+3^{1003}\cdot a_{2007}\right)\cdot\sqrt{3}+\left(3\cdot a_2+...+3^{1003}\cdot a_{2006}\right)=$
$=\left(b_1+3\cdot b_3+...+3^{1003}\cdot b_{2007}\right)\cdot\sqrt{3}+\left(3\cdot b_2+...+3^{1003}\cdot b_{2006}\right).$

Deoarece $\sqrt{3}\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$, avem relațiile:

$a_1+3\cdot a_3+...+3^{1003}\cdot a_{2007}=b_1+3\cdot b_3+...+3^{1003}\cdot b_{2007}$ (1) și

$3\cdot a_2+...+3^{1003}\cdot a_{2006}=3\cdot b_2+...+3^{1003}\cdot b_{2006}.$

Din (1) obținem $a_1-b_1=-3\cdot a_3-...-3^{1003}\cdot a_{2007}+3\cdot b_3+...+3^{1003}\cdot b_{2007}$, deci a_1-b_1 este multiplu de 3. Deoarece $a_1,b_1\in\{-1,1\}$, avem $a_1-b_1\in\{-2,0,2\}\Rightarrow a_1-b_1=0\Rightarrow$ $\Rightarrow a_1=b_1$. Analog se obține $a_3=b_3$ etc.

Un raționament similar pentru a doua egalitate conduce la $a_2=b_2$, $a_4=b_4$ etc.

În concluzie, nu există două alegeri diferite ale numerelor $a_i\in\{-1,1\}$, $i=\overline{1,2007}$, astfel ca $a_1\sqrt{3}+a_2\left(\sqrt{3}\right)^2+...+a_{2007}\left(\sqrt{3}\right)^{2007}$ să ia aceeași valoare. Atunci $\text{card}A=2^{2007}$.

17. Determinați toate perechile (p,q) de numere prime care verifică relația:

$$p^2+q^2+1553\le 2(23p+32q)+13.$$

Soluție: $p^2+q^2+1553\le 2(23p+32q)+13\Leftrightarrow p^2-46p+q^2-64q+1540\le 0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow(p-23)^2+(q-32)^2\le 13.$

Dar $(p-23)^2\le(p-23)^2+(q-32)^2\le 13\Rightarrow(p-23)^2\le 13\Rightarrow\sqrt{(p-23)^2}\le\sqrt{13}\Rightarrow$ $\Rightarrow-\sqrt{13}\le p-23\le\sqrt{13}\Rightarrow 23-\sqrt{13}\le p\le 23+\sqrt{13}.$

Dar p este prim și $19<23-\sqrt{13}\le p\le 23+\sqrt{13}<27\Rightarrow 19<p<27$ și p este prim $\Rightarrow$ $\Rightarrow p=23\Rightarrow(q-32)^2\le 13\Rightarrow-\sqrt{13}\le q-32\le\sqrt{13}\Rightarrow 32-\sqrt{13}\le q\le 32+\sqrt{13}.$

$28<32-\sqrt{13}\le q\le 32+\sqrt{13}<36\Rightarrow q\in\{29;31\}\Rightarrow(p,q)\in\{(23;29);(23;31)\}.$

B. Probleme de creativitate

1. Numerele a, b, c sunt raționale pozitive și $\sqrt{a}+\sqrt{b}=c$. Arătați că $\sqrt{a}$ și $\sqrt{b}$ sunt numere raționale.

Soluție: Din $\sqrt{a}+\sqrt{b}=c \Rightarrow \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=c\cdot\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a-b=c\cdot\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)$, deci $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\dfrac{a-b}{c}$. $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{a}-\sqrt{b}=c+\dfrac{a-b}{c}$.

$2\cdot\sqrt{a}=\dfrac{a-b+c^2}{c}$ sau $\sqrt{a}=\dfrac{a-b+c^2}{2c}\in\mathbb{Q}$.

$\sqrt{b}=c-\sqrt{a}=c-\dfrac{a-b+c^2}{2c}=\dfrac{c^2-a+b}{2c}\in\mathbb{Q}$.

2. Demonstrați că: $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{8}}>1$.

Soluție: Fie $a=\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{8}}$ și

$b=\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{7}}+\dfrac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{9}}$.

$$a+b=\frac{\sqrt{2}-1}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}+\ldots+\frac{\sqrt{9}-\sqrt{8}}{\left(\sqrt{9}-\sqrt{8}\right)\left(\sqrt{9}+\sqrt{8}\right)}.$$

$$a+b=\left(\sqrt{2}-1\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{5}-\sqrt{4}\right)+\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)+\left(\sqrt{7}-\sqrt{6}\right)+$$
$$+\left(\sqrt{8}-\sqrt{7}\right)+\left(\sqrt{9}-\sqrt{8}\right)=\sqrt{9}-1=2.$$

Avem $a+b=2$, $a,b>0$ și $a>b$, deoarece $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}>\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}>\dfrac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}$;

$\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}>\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{7}}$; $\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{8}}>\dfrac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{9}}$. Atunci $a>\dfrac{a+b}{2}=1$.

3. Determinați numerele iraționale x astfel încât numerele x^2+2x și x^3-6x să fie raționale.

Soluție: $x^3-6x=x\left(x^2+2x\right)-2\left(x^2+2x\right)-2x$. Notăm $x^3-6x=m$, $x^2+2x=n$ și obținem $m=\left(n-2\right)x-2n$. Cum $m,n\in\mathbb{Q}$, rezultă că egalitatea este posibilă doar dacă $n-2=0 \Leftrightarrow n=2 \Leftrightarrow x^2+2x=2 \Leftrightarrow x^2+2x+1=3 \Leftrightarrow \left(x+1\right)^2=3 \Leftrightarrow x+1=\sqrt{3}$ sau $x+1=-\sqrt{3} \Rightarrow x\in\left\{\sqrt{3}-1;-\sqrt{3}-1\right\}$.

4. Stabiliți dacă există numerele întregi a, pentru care numărul $\dfrac{\sqrt{\dfrac{119+a}{119-a}}+\sqrt{\dfrac{119-a}{119+a}}}{\sqrt{\dfrac{119+a}{119-a}}-\sqrt{\dfrac{119-a}{119+a}}}$ este întreg.